Metodi Matematici Applicati alla Biologia

Anno Accademico 2008/09

II Semestre

Settimana 1 – Marzo 2009

Utilità della Matematica in Biologia

- L'uso della matematica in Biologia è stato sempre fonte di polemiche ;

- Molti matematici si sono giocati la loro reputazione tramite applicazioni alla biologia dei loro risultati;

- Il problema non è *se* sia utile la matematica in biologia ma quale debba essere il suo *ruolo*.

La Biomatematica

- La matematica permette di isolare gli effetti di alcune variabili (*indipendenti*) su delle altre (*dipendenti*), tramite la costruzione di MODELLI;

- Le prime applicazioni alla biologia hanno riguardato la dinamica delle popolazioni (isolate e non);

- Oggi la matematica trova applicazioni in tutti i campi della biologia.

Modelli dinamici

• La prima domanda che il *modellizzatore* si deve porre quando prende in considerazione la dinamica di una o più variabili riguarda l'*orizzonte temporale* che separa due dati successivi;

Il problema si traduce nella scelta tra un orizzonte temporale di tipo continuo o discreto.

•La scelta, come vedremo, non è ininfluente e porta all'adozione di due strumenti matematici alternativi: le *equazioni differenziali* o *alle differenze*.

Un semplice modello di crescita: Malthus

Il primo modello di crescita di una popolazione isolata si deve a Malthus (1798):

- Modello a tempo continuo $\Rightarrow$ equazione differenziale;
- $x(t)$ popolazione al tempo *t*;
- $\dfrac{\partial x(t)}{\partial t} = \dot{x}$ crescita istantanea della popolazione al tempo *t*;
- a coefficiente di fertilità.

Un semplice modello di crescita: Malthus

$$\dot{x} = f(x(t)) = ax(t)$$

Equazione differenziale ordinaria (EDO) lineare autonoma del 1° ordine

•Ordinaria: compaiono solo le derivate della funzione *x(t)* , in caso contrario si parla di *eq. diff. alle derivate parziali* (PDE) ;

•Lineare: *f* è lineare in *x(t)*, in caso contrario sarebbe *nonlineare*;

•Autonoma: non dipende direttamente da *t*, altrimenti sarebbe *non-autonoma*;

•1° ordine: compare solo la derivata prima di *x(t)*.

Soluzione di un'equazione differenziale

Trovare la soluzione di un'equazione differenziale significa trovare la o le funzioni *x(t)* che soddisfano per ogni tempo *t* l'equazione stessa

L'equazione di Malthus ammette queste soluzioni:

$$x(t) = ke^{at}$$

con $k \in \mathbb{R}$.

Punti di equilibrio

I punti di equilibrio sono soluzioni costanti dell'equazione differenziale

Nel caso di equazioni differenziali del 1° ordine gli eventuali punti di equilibrio si trovano risolvendo per *x(t)* l'equazione:

$$\dot{x} = 0$$

che nel nostro caso si traduce in:

$$ax(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = 0$$

Convergenza o Divergenza

Il prossimo passo consiste nel chiedersi cosa succede alla popolazione al passare del tempo, cioè in termini matematici per

$$t \to +\infty$$

Per farlo si prende la soluzione $x(t) = ke^{at}$ e si risolve il limite:

$$\lim_{t \to +\infty} ke^{at}$$

che dipende dai valori di k e a.

Convergenza o Divergenza

Dalle proprietà della funzione esponenziale deduciamo che:

- Se *a>0*, $\lim_{t\to+\infty} ke^{at} = +\infty$ per *k>0* e $\lim_{t\to+\infty} ke^{at} = -\infty$ per *k<0;*

- Se *a=0*, $ke^{at} = 0$ costante;

- Se *a<0*, $\lim_{t\to+\infty} ke^{at} = 0$, estinzione.

La questione ora è: <u>come trovare il valore del parametro *k*?</u>

Parametri e condizione iniziale

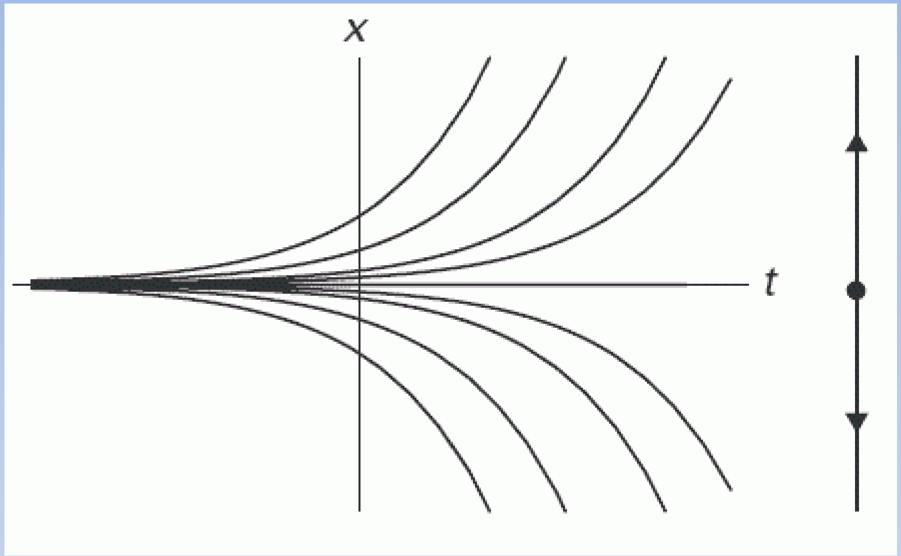
La soluzione $x(t) = ke^{at}$ identifica una famiglia di funzioni. Serve un'ulteriore informazione per ridursi ad una soluzione singola.

L'informazione di solito coinvolge la conoscenza del valore della densità della popolazione in almeno un particolare istante di tempo (di solito l'istante iniziale $t=0$, cioè $x(0)$).

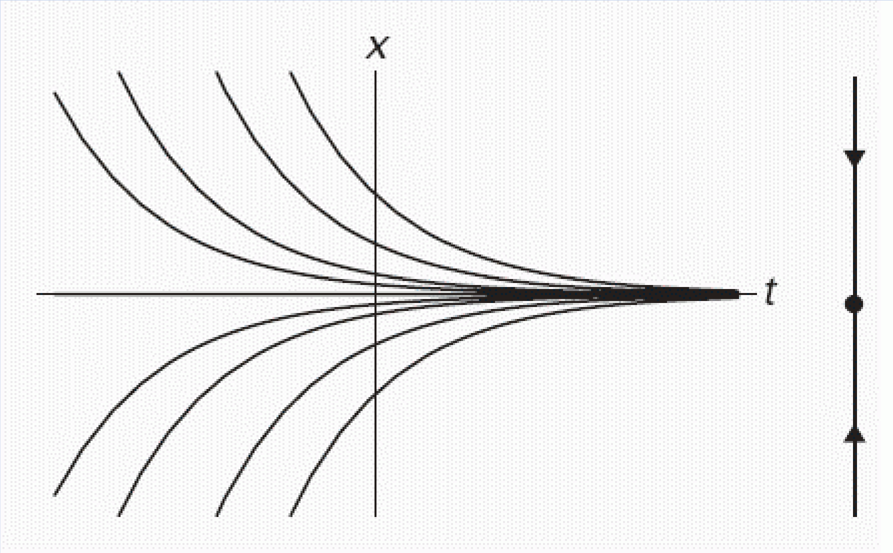
Se abbiamo che $x(0)=\mu_0$, possiamo sostituirlo nella soluzione e ricavarne il valore di k.

$$\mu_0 = x(0) = k \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = \mu_0 e^{at}$$

Soluzione grafica: Il diagramma di fase



$a > 0$



$a < 0$

La versione in tempo discreto

Adottare un’ottica di tempo discreto significa specificare una legge che regola l’evoluzione della popolazione da un periodo (giorno, mese, anno…) al periodo successivo:

$$x(t) \to x(t+1) \to x(t+2)\ldots$$

La versione in tempo discreto del modello di crescita Malthusiano è la seguente:

$$x(t+1) - x(t) = ax(t)$$
$$\Downarrow$$
$$x(t+1) = f(x(t)) = (1+a)x(t)$$

che è una equazione alle differenze finite del primo ordine, autonoma e lineare.

a è ancora una misura di fertilità della popolazione.

Punto d'equilibrio e dinamica

Nel caso di equazioni alle differenze del primo ordine i punti di equilibrio sono quelli che risolvono l'equazione:

$$x(t+1) = x(t) = x^*$$

nel nostro caso

$$x^* = 0$$

è l'unico punto di equilibrio

Punto d'equilibrio e dinamica

Se consideriamo il punto di partenza $x(0) = \mu_0$ abbiamo la seguente dinamica:

$$x(0) = \mu_0$$

$$x(1) = (1+a)x(0) = (1+a)\mu_0$$

$$x(2) = (1+a)x(1) = (1+a)^2 \mu_0$$

…

$$x(t) = (1+a)x(t-1) = (1+a)^t \mu_0$$

Al passare del tempo la popolazione andrà verso

$$\lim_{t \to +\infty} (1+a)^t \mu_0$$

Punto d'equilibrio e dinamica

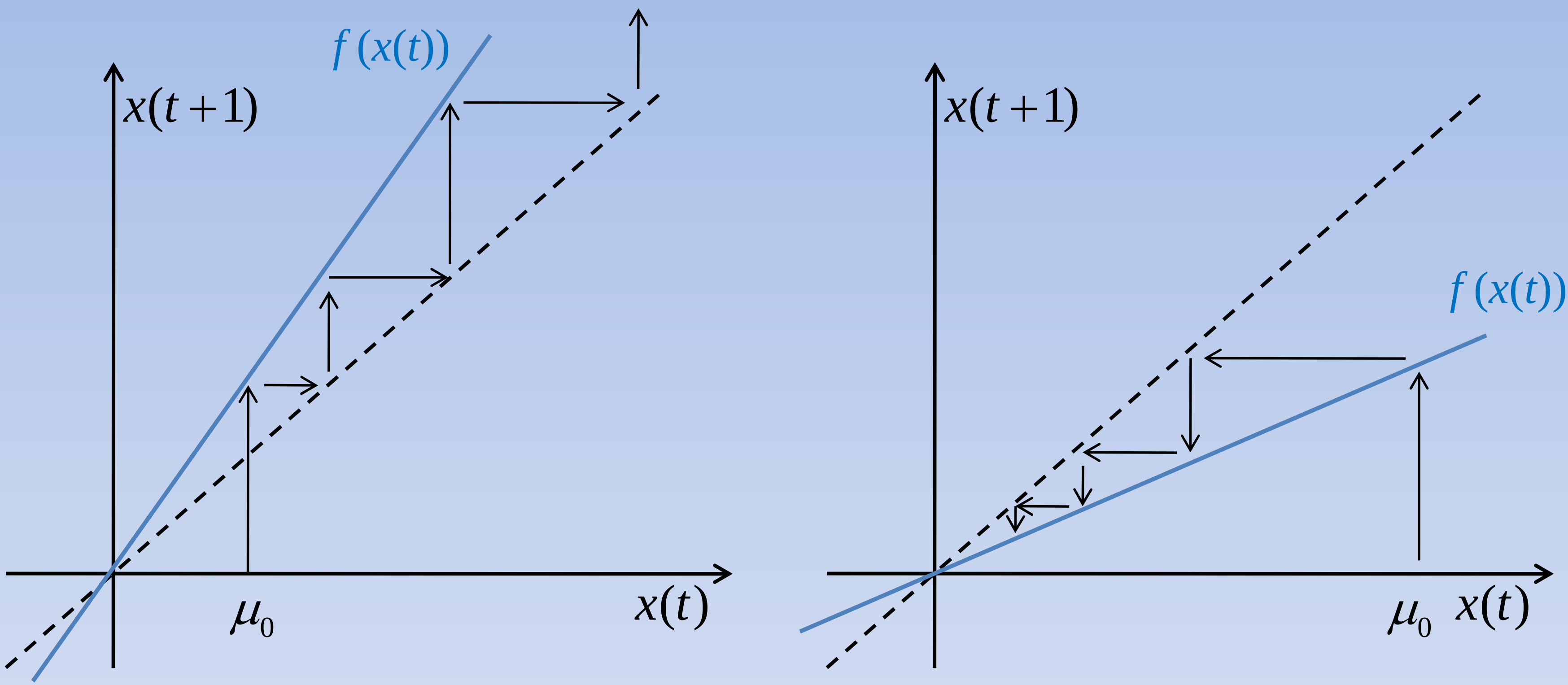
L'esito del processo dinamico dipenderà dal valore di $(1+a)$:

- Se $a > 0 \Rightarrow (1+a) > 1$, $\lim_{t\to+\infty}(1+a)^t \mu_0 = +\infty$;

- Se $a = 0 \Rightarrow (1+a) = 1$, $\lim_{t\to+\infty}(1+a)^t \mu_0 = \mu_0$ costante;

- Se $-1 < a < 0 \Rightarrow 0 < (1+a) < 1$, $\lim_{t\to+\infty}(1+a)^t \mu_0 = 0$ estinzione.

Soluzione per via grafica



$a > 1$

$0 < a < 1$