Metodi Matematici Applicati alla Biologia

Anno Accademico 2008/09

II Semestre

Settimana 2 – Marzo/Aprile 2009

Crescita di tipo logistico: Verhulst

- La crescita esponenziale presuppone una disponibilità *illimitata* di risorse;

- In presenza di risorse scarse è lecito assumere che soltanto finché la popolazione è poco numerosa, questa possa crescere in modo direttamente proporzionale alla popolazione stessa;

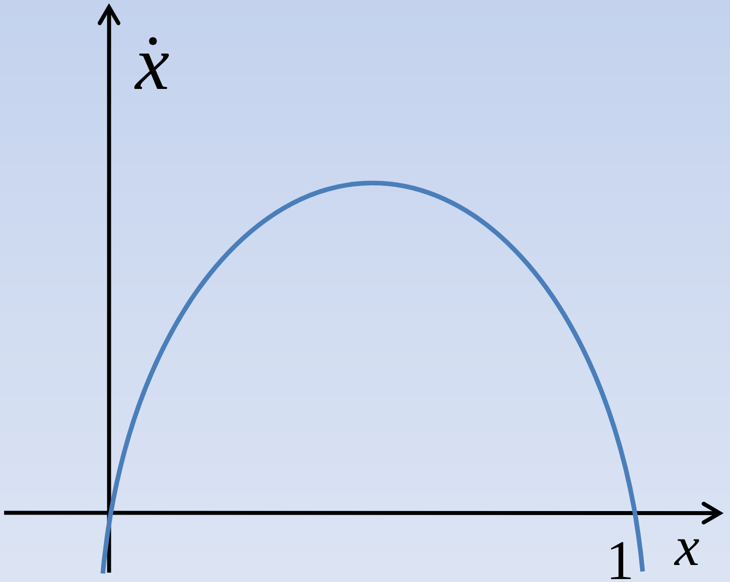
- Quando la popolazione diventa troppo numerosa il tasso di crescita può diventare negativo.

Crescita di tipo logistico: Verhulst

- Verhulst (1838) ha proposto un modello di crescita di una popolazione isolata di tipo logistico:

$$\dot{x} = f(x) = ax(1 - x)$$

dove $a \in \mathbb{R}^+$.

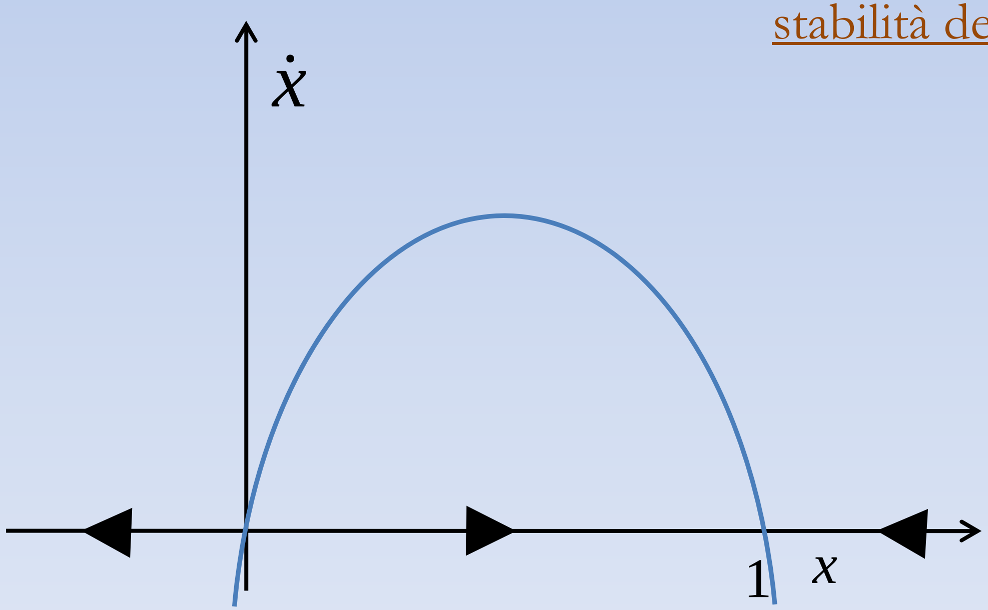


Proprietà della funzione logistica

- Punti di equilibrio: $\dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^* = 0 \;\; ; \;\; x_2^* = 1;$

- $x = 1$ capacità portante.

Le frecce ci dicono tutto sulla stabilità dei punti fissi



Soluzione dell'equazione logistica in tempo continuo

$$\dot{x} = f(x) = ax(1 - x)$$

L'equazione differenziale logistica è nonlineare

Non esiste un metodo di soluzione valido per tutte le equazioni differenziali nonlineari

Equazioni differenziali a variabili separabili

L'equazione logistica appartiene alla classe di eq. differenziali:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = F(x, y) = \frac{g(y)}{h(x)}$$

chiamate equazioni differenziali a variabili separabili.

Si può trovare la soluzione di questa classe di funzioni se si è in grado di risolvere questi integrali:

$$\int g(y)dy = \int h(x)dx$$

Soluzione dell’equazione logistica

- Nel nostro caso la variabile y è sostituita dalla variabile tempo (t);

- Possiamo riscrivere l’equazione in questo modo:

$$\dot{x} = f(x) = \frac{a}{\dfrac{1}{x(1-x)}}$$

In questo modo è evidente che:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = F(x,t) = \frac{g(t)}{h(x)}$$

dove $g(t) = a$ e $h(x) = {}^{1}\!/_{x(x-1)}$.

Soluzione dell'equazione logistica

- Per risolvere l'equazione logistica dobbiamo risolvere:

$$\int a dt = \int \frac{dx}{x(1-x)}$$

che fornisce la soluzione:

$$x(t) = \frac{Ke^{at}}{1+Ke^{at}}$$

e con la cond.iniziale:

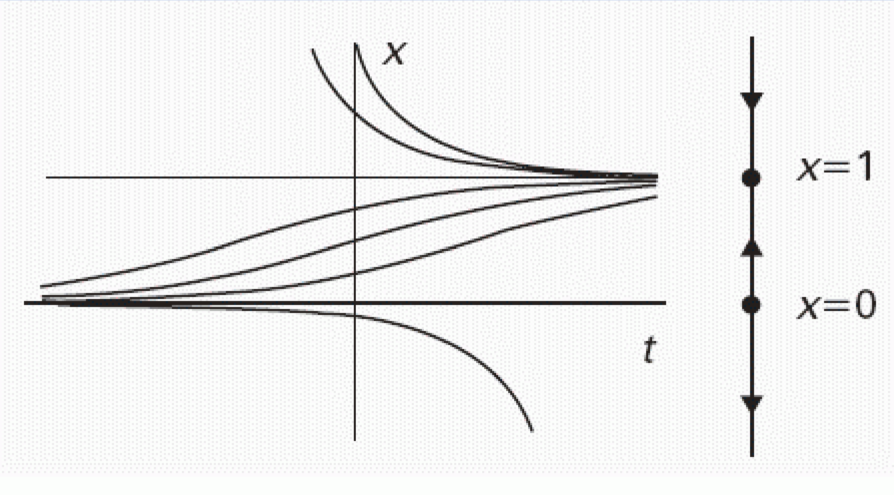
$$x(t) = \frac{\mu_0 e^{at}}{1-\mu_0+\mu_0 e^{at}}$$

Comportamento asintotico dell'equazione logistica

Dalle proprietà della funzione esponenziale deduciamo che:

- Se $\mu_0>0$, $\lim_{t\to+\infty} x(t)=1$;

- Se $\mu_0<0$, $\lim_{t\to+\infty} x(t)=-\infty$ divergenza.



Calcolo dell'istante di raggiungimento di un livello k

La soluzione analitica dell'eq. differenziale logistica permette di calcolare il preciso istante in cui un certo livello di popolazione verrà raggiunto.

Quali sono i livelli che ha senso considerare? Dipende dalla condizione iniziale μ_0 e dal livello asintotico (1), quindi:

$$0 < \mu_0 < k < 1$$

oppure

$$1 < k < \mu_0$$

Calcolo dell'istante di raggiungimento di un livello k

Ricaviamo il tempo (t) dell'equazione:

$$x(t) = k = \frac{\mu_0 e^{at}}{1 - \mu_0 + \mu_0 e^{at}}$$

da cui si ricava:

$$t = \ln\left[\frac{k(1-\mu_0)}{\mu_0(1-k)}\right]\frac{1}{a}$$

Periodo di raddoppiamento

Quando $k = 2\mu_0$ il calcolo diventa un calcolo del periodo di raddoppiamento e si ottiene:

$$t_r = \ln\left(\frac{2 - 2\mu_0}{1 - 2\mu_0}\right)\frac{1}{a}$$

che è positivo per

$$\mu_0 < \frac{1}{2}$$

Crescita logistica, versione in tempo discreto

La versione in tempo discreto della crescita logistica si formalizza in questo modo:

$$x_{t+1} = f(x_t) = a x_t (1 - x_t)$$

i cui punti stazionari sono:

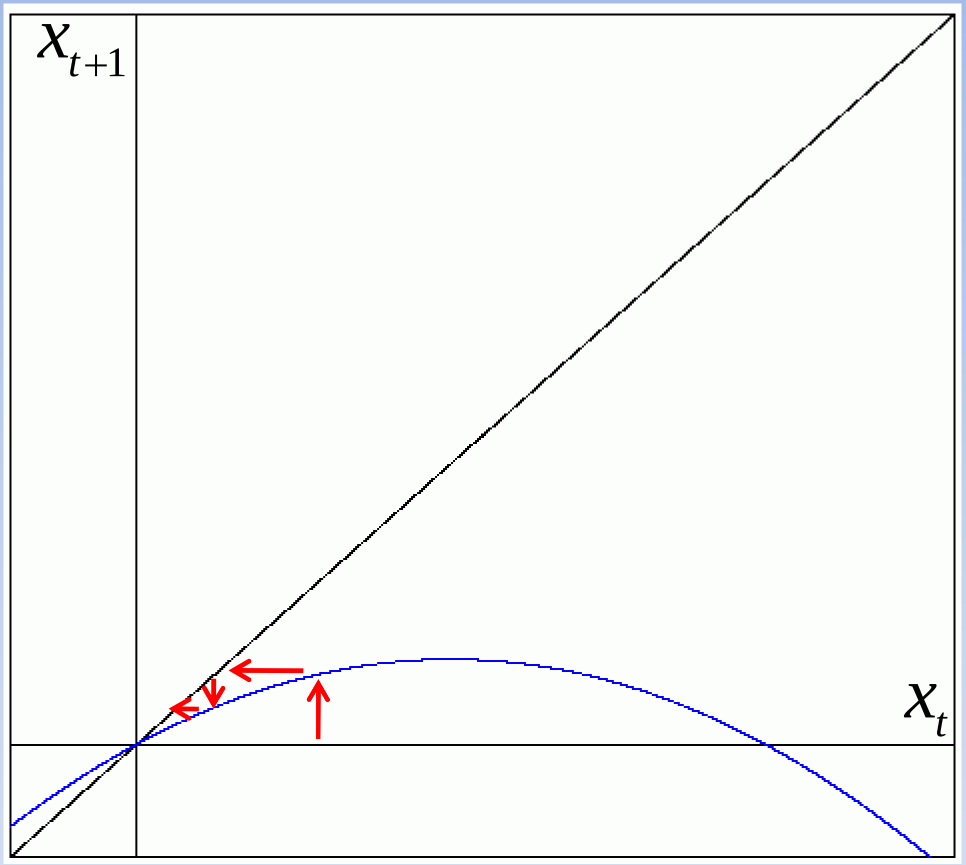
$$x_1^* = 0 \quad ; \quad x_2^* = \frac{a-1}{a}$$

Il secondo stato stazionario è positivo, e quindi ha senso da un punto di vista biologico, solo se $a>1$

Con il metodo grafico possiamo dedurre l'andamento asintotico della popolazione.

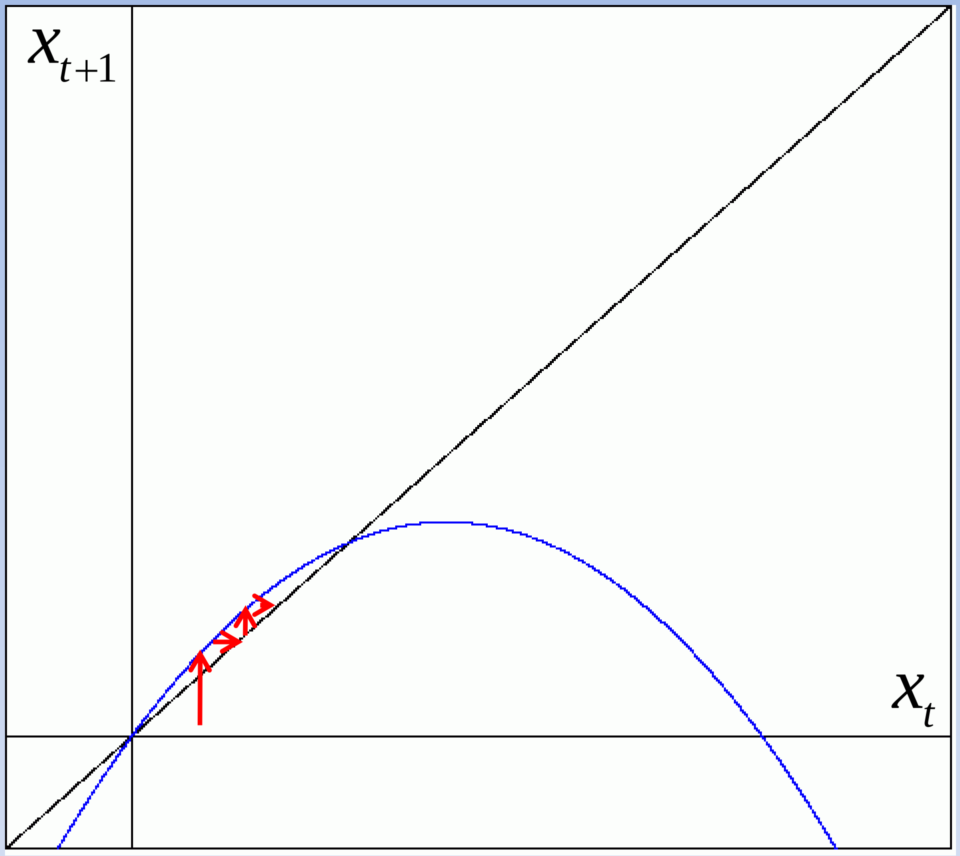
Comportamento asintotico: metodo grafico

$$0 < a < 1$$



La popolazione si estingue!

Comportamento asintotico: metodo grafico



$a > 1$

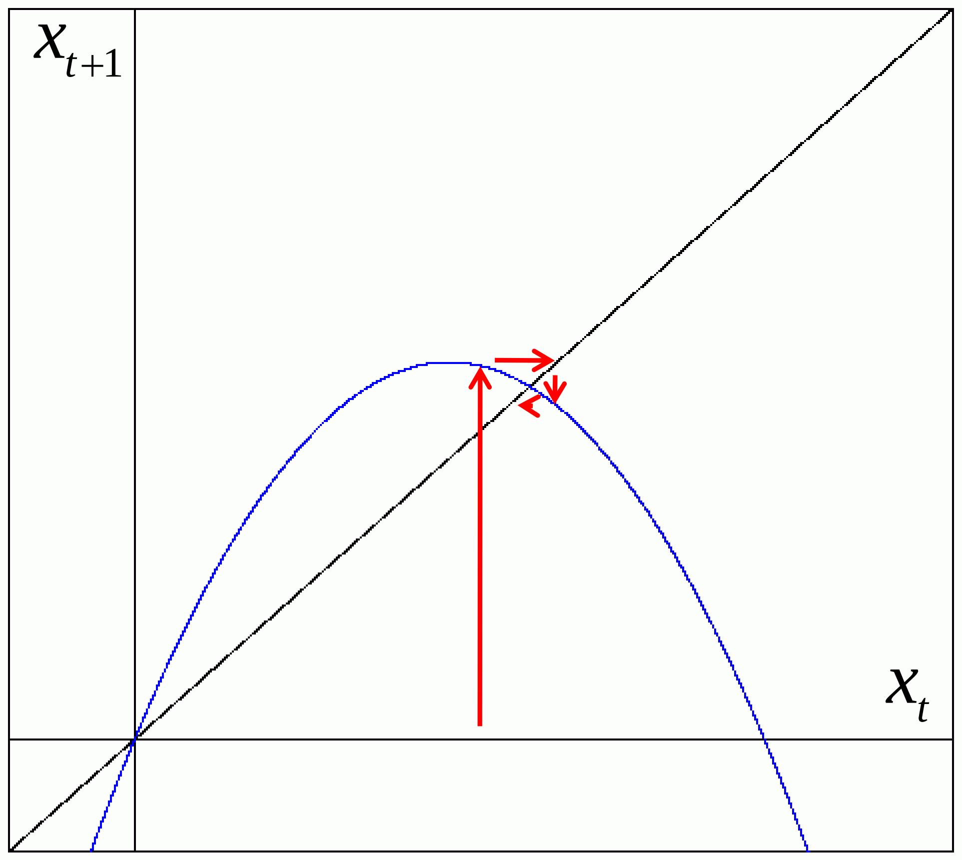
caso 1

La popolazione cresce in modo monotono… almeno in un *intorno* del punto di equilibrio.

Comportamento asintotico: metodo grafico

$a > 1$

caso 2

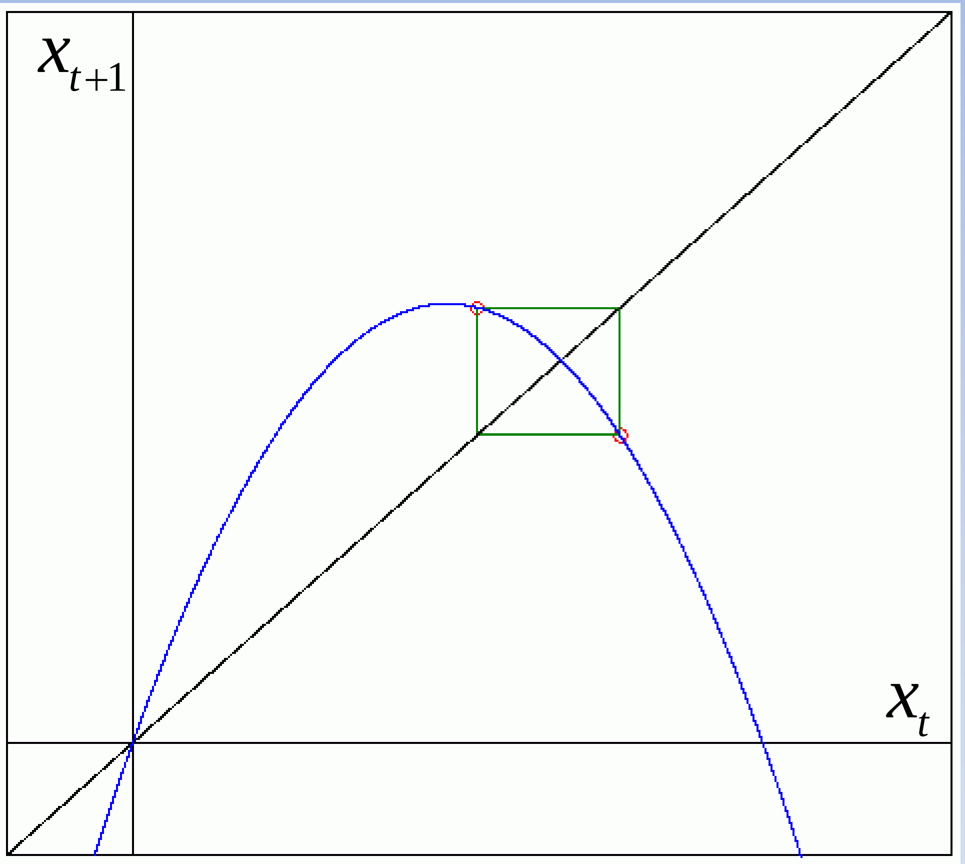


La popolazione cresce in modo oscillante… almeno in un *intorno* del punto di equilibrio.

<u>*Comportamento asintotico: metodo grafico*</u>

$a > 1$

caso 3

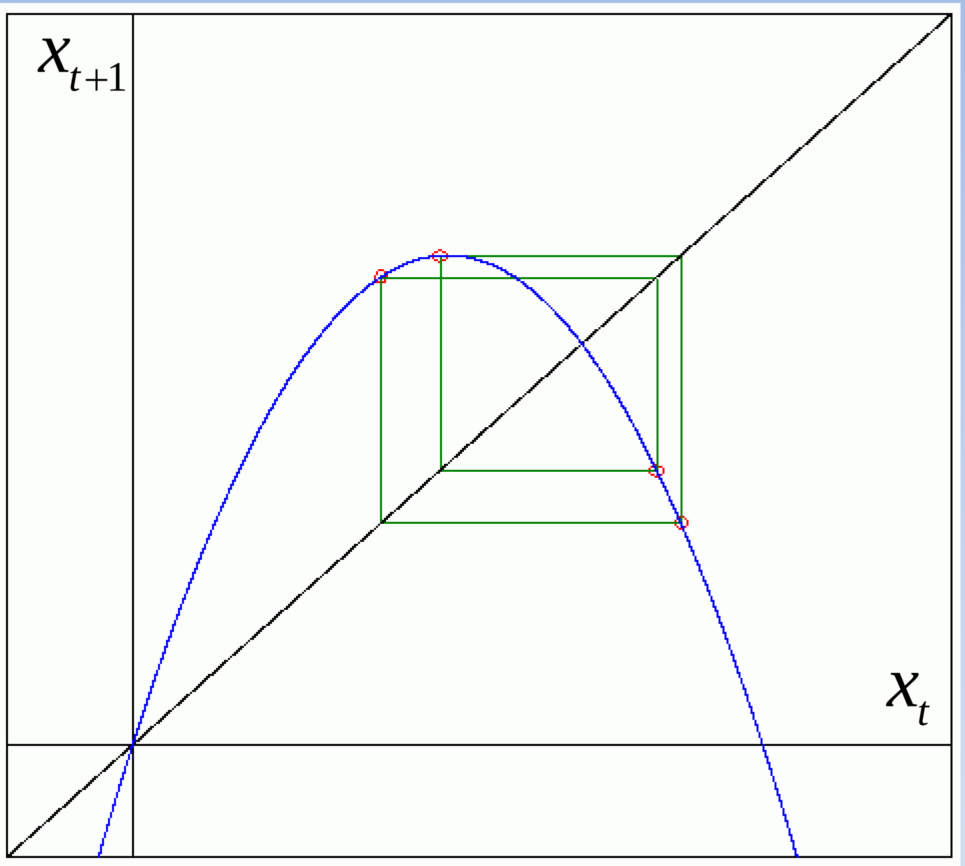


L'esito asintotico del processo di crescita non è più un punto di equilibrio ma una <u>*situazione ciclica*</u>.

Comportamento asintotico: metodo grafico

$a > 1$

caso 4

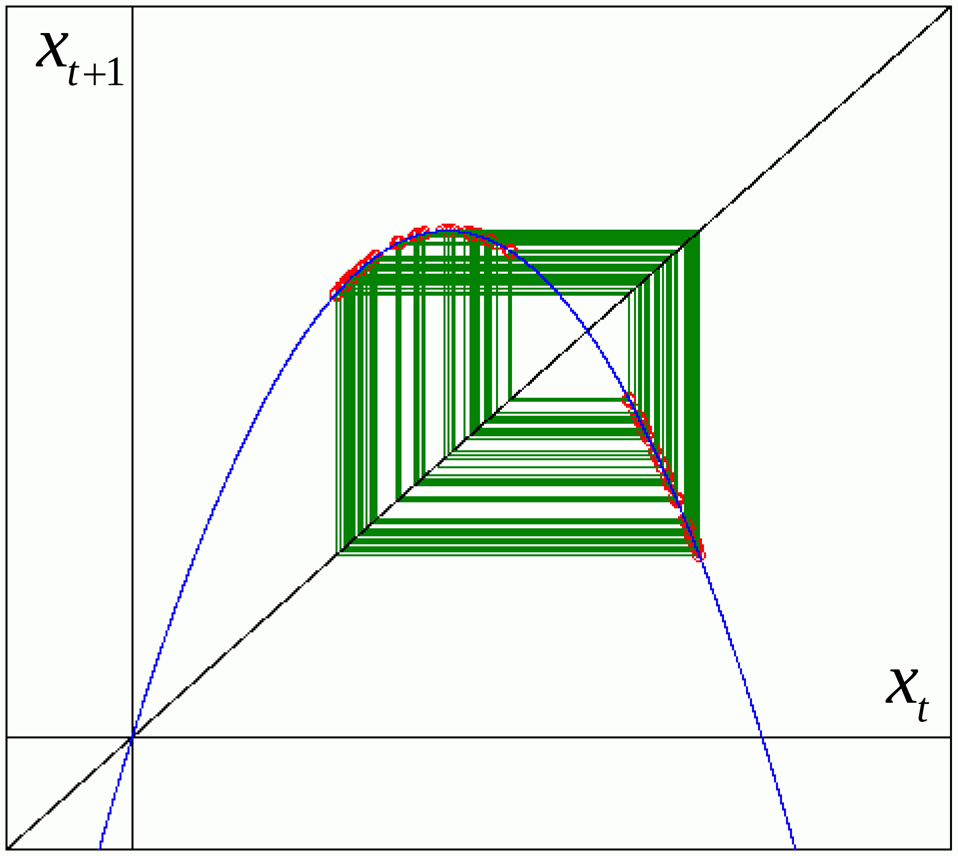


L'esito asintotico del processo di crescita non è più un punto di equilibrio ma una *situazione ciclica*.

Comportamento asintotico: metodo grafico

$a > 1$

caso 5



L’esito asintotico del processo di crescita è aperiodico, in particolare di tipo *caotico*.

Comportamento asintotico: metodo analitico

Esiste la possibilità di ricavare per via analitica i valori del parametro corrispondenti a ciascun caso appena visto per via grafica?

In altre parole:

Come essere certi della asintotica stabilità di un punto di equilibrio?

Si può fornire una risposta, anche se la sola valenza è ***locale***, cioè in un intorno del punto di equilibrio.

Studio locale della derivata prima

Le risposte che cerchiamo ci vengono date del valore che assume la derivata della funzione che esprime la dinamica calcolata nei valori di equilibrio:

$$f'(x^*)$$

In particolare valgono le regole:

- Se $\left|f'(x^*)\right| < 1$ allora il p.to di equilibrio è localmente stabile;
- Se $\left|f'(x^*)\right| > 1$ allora il p.to di equilibrio è instabile.

Valori di Biforcazione

Il valore di biforcazione di un parametro è il valore soglia tra due comportamenti asintotici diversi.

Da un punto di vista analitico saranno di certo valori di biforcazione quelli per cui:

$$\left| f'(x^*) \right| = 1$$

esistono varie tipologie di biforcazioni, quella che porta alla creazione di cicli periodici in seguito alla perdita di stabilità del punto di equilibrio viene chiamata biforcazione flip e si può verificare quando il valore della derivata calcolata nel p.to stazionario diventa inferiore a -1, per cui:

$$a_f = \left\{ a : f'(x^*) = -1 \right\}$$

Verifica nel caso della logistica

Per prima cosa calcoliamo la derivata:

$$f'(x_t) = a - 2ax_t$$

Cominciamo analizzando il punto di equilibrio x_1^*

$$f'(0) = a$$

Assumendo valori positivi del parametro è ovvio che il punto diventa instabile quando $a > 1$ il che conferma l'evidenza grafica.

Passando al punto di equilibrio x_2^*

$$f'\left(\frac{a-1}{a}\right) = 2 - a$$

Locale stabilità del punto di equilibrio

Un semplice sistema di disequazioni ci permette di confermare che:

- Se 0< a <1 o a > 2, allora il punto di equilibrio è instabile;

- Se 0 < a < 2, allora il punto di equilibrio è instabile.

In particolare

$$a_f = 3$$

al primo tipo di biforcazione, quello che avviene per

$$a_t = 1$$

Si da il nome di biforcazione transcritica.

Un utile strumento grafico, il Diagramma di Biforcazione