Metodi Matematici Applicati alla Biologia

Anno Accademico 2008/09

II Semestre

Settimana 3 – Aprile 2009

Introduzione di inferenze esterne: la caccia

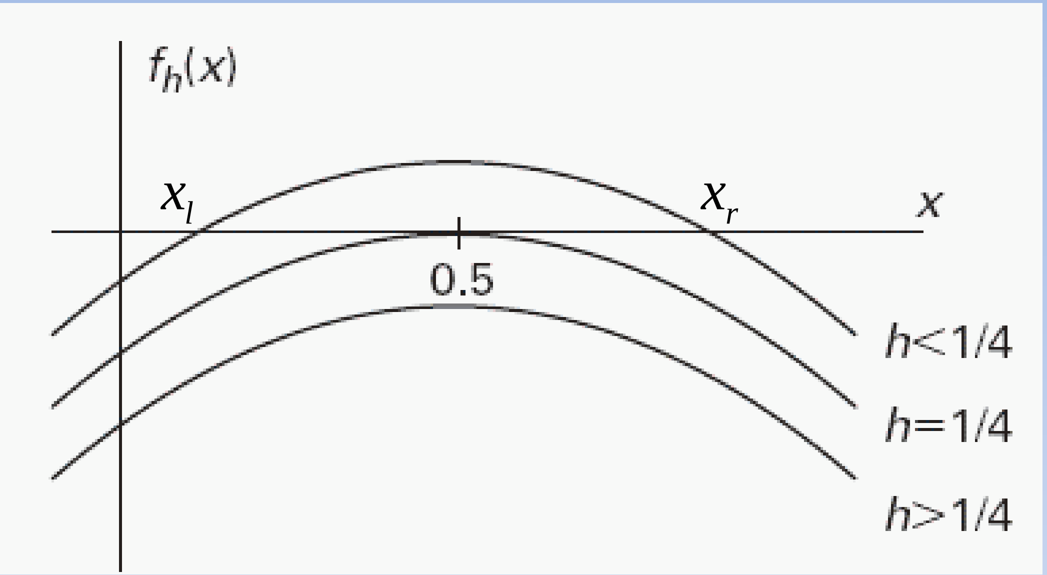
- Consideriamo un caso di crescita di tipo logistico con $a = 1$ e introduciamo un coefficiente h che indica il tasso istantaneo di caccia:

$$\dot{x} = f_h(x) = x\left(1 - x\right) - h$$

con $h \geq 0$.

- Come è influenzata la crescita della popolazione dal tasso istantaneo di caccia?

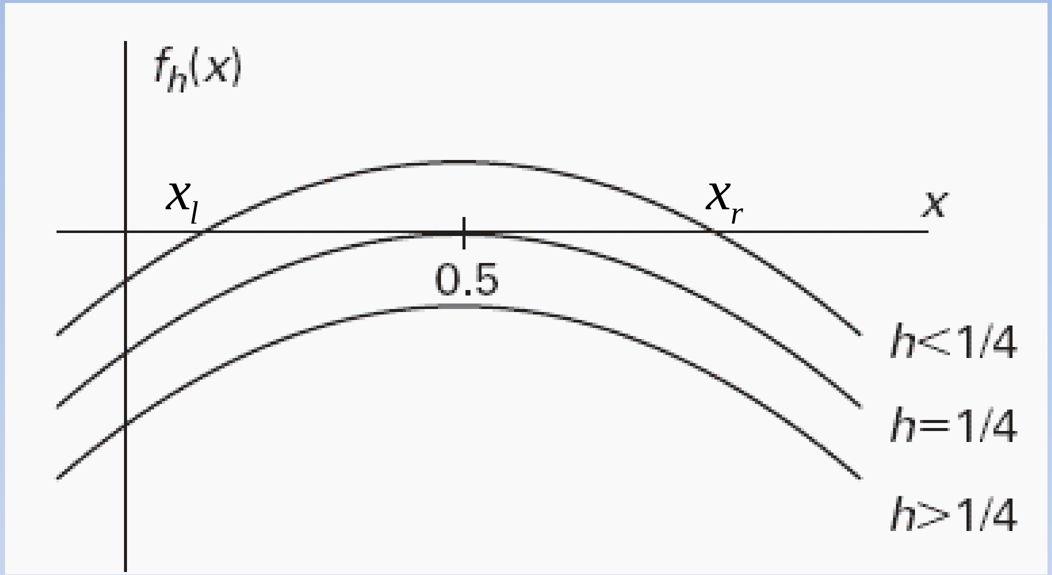
Risoluzione per via grafica



Per $0 < h < \frac{1}{4}$ esistono due punti fissi, di cui uno localmente stabile.

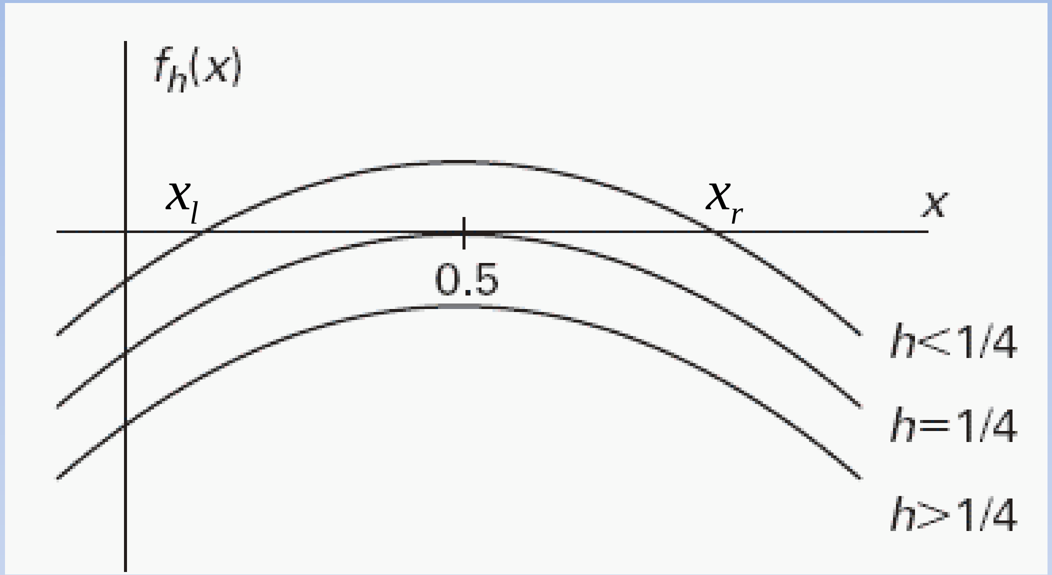
Se la popolazioni iniziale è sufficientemente grande $\mu_0 > x_l$ allora il sistema converge verso il punto fisso x_r altrimenti si estingue.

Risoluzione per via grafica



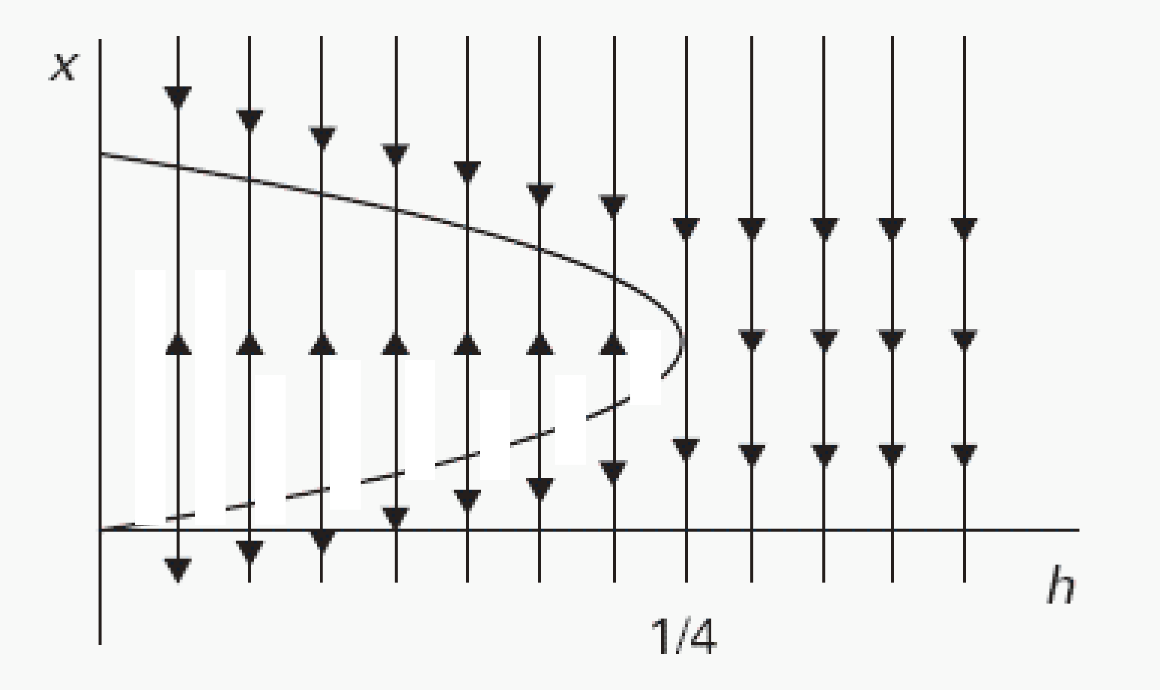
Per $h > \frac{1}{4}$ non esiste nessun punto fisso e, comunque sia presa la condizione iniziale, la popolazione è destinata ad estinguersi.

Risoluzione per via grafica



h=1/4 è un importante valore di biforcazione

Diagramma di Biforcazione



h=1/4 è un importante valore di biforcazione

Versione in tempo discreto

• Consideriamo un caso di crescita di tipo logistico con $a > 1$ e introduciamo un coefficiente h che indica il tasso istantaneo di caccia:

$$x_{t+1} = f_{a,h}(x_t) = a x_t \left(1 - x_t\right) - h$$

con $h \geq 0$.

•Come è influenzata la crescita della popolazione dal tasso istantaneo di caccia?

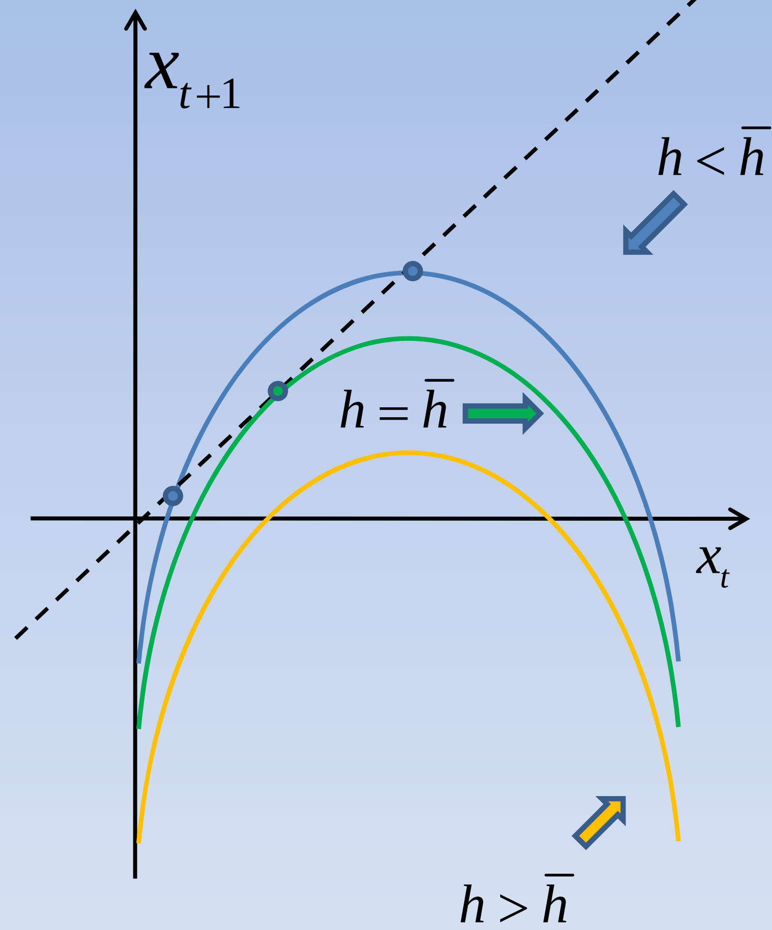
Metodo analitico/grafico

I punti stazionari si trovano:

$$x^*_{l,r} = \frac{a - 1 \pm \sqrt{(1-a)^2 - 4ah}}{2a}$$

e sono entrambi postivi ammesso che:

$$h < \bar{h} = \frac{(1-a)^2}{4a}$$

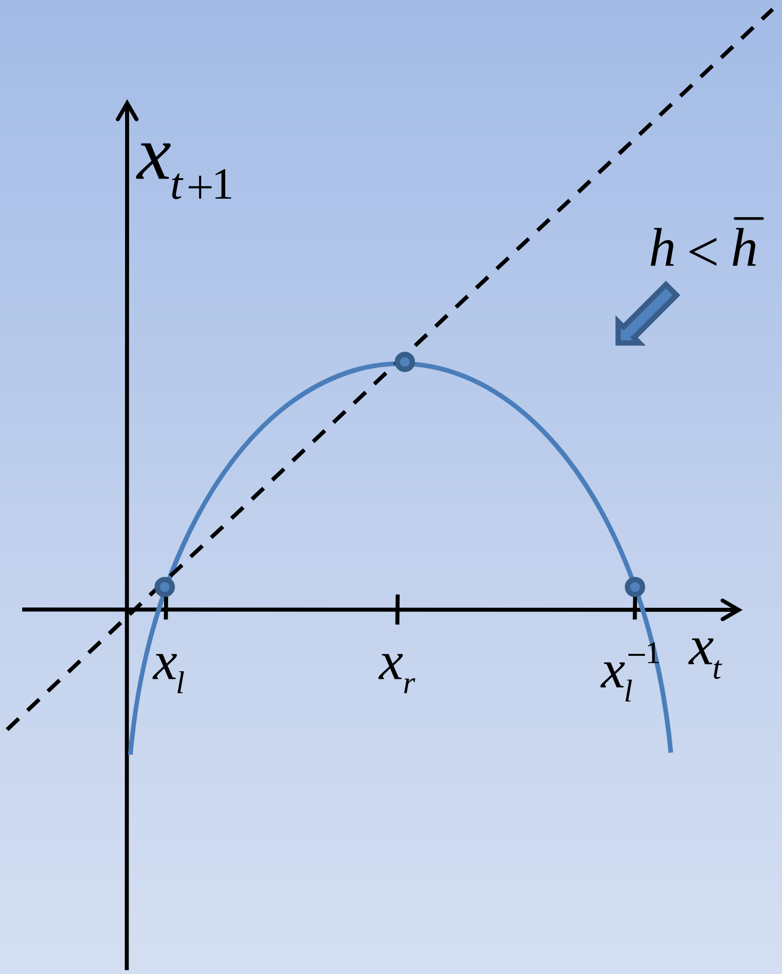


Caso con due punti fissi positivi

Il bacino di attrazione di x_r è dato da:

$$x_l < x_0 < x_l^{-1}$$

Tutte le altre cond.iniz. conducono
all'estinzione della popolazione



Crescita logistica con caccia stagionale

• Consideriamo un caso di crescita di tipo logistico e introduciamo l'ipotesi che il tasso istantaneo di caccia risenta di effetti stagionali:

$$\dot{x} = f(t, x) = x\left(1 - x\right) - h(1 + \sin(2\pi t))$$

con $h \geq 0$.

Questa è una equazione differenziale nonautonoma

Crescita logistica con caccia stagionale

•Questo tipo di equazione non si risolve per via analitica. Possiamo però dire comunque un po’ di cose:

a) I periodi in cui la caccia è più intensa sono $t = \frac{1}{4} + n$ in cui il tasso di caccia raggiunge un livello pari a 2;

b) Sei mesi dopo, per $t = \frac{3}{4} + n$ il tasso di crescita è al minimo, cioè è nullo;

c) Il tasso di caccia in un determinato istante è pari al tasso un anno dopo (o prima).

Crescita logistica con caccia stagionale

•Il valore di biforcazione si può solo approssima numericamente ma è sempre

$$h \simeq \frac{1}{4}$$

•Non ci sono punti fissi ma punti periodici, la convergenza è sostituita da oscillazioni intorno al punto fisso;

•Anche un'eventuale divergenza sarebbe oscillante.

Crescita logistica con caccia stagionale