Metodi Matematici Applicati alla Biologia

Anno Accademico 2008/09

II Semestre

Settimana 8 – Maggio 2009

TEORIA DEI GIOCHI

La Teoria dei Giochi è un ramo della matematica che permette di studiare decisioni individuali in un contesto di interdipendenza con gli altri individui.

In pratica, lo scopo della Teoria dei Giochi è analizzare il comportamento di individui (*giocatori*) che devono prendere decisioni le cui conseguenze dipendono anche dalle decisioni prese da altri individui (*giocatori*).

Questa Teoria trova applicazione in un ampio numero di contesti: in economia, in finanza, in politica, in psicologia, in biologia…

Elementi fondamentali di un Gioco

Ogni gioco è caratterizzato da queste componenti:

1. L'insieme dei GIOCATORI: i=1…n;

2. L'insieme delle STRATEGIE a disposizione di ogni giocatore: s=1…m;

3. I PAYOFF (premi) associati ad ogni giocatore e che dipendono dalla strategia adottata dal giocatore stesso e dagli altri giocatori:

$$p_i(s_i, s_{-i})$$

Strategia degli altri giocatori

Strategia del giocatore stesso

Proprietà di un Gioco

Un gioco può essere (fra le altre cose):

- A informazione completa/incompleta a seconda che i giocatori conoscano o meno tutte le strategie a disposizione di tutti i giocatori e i relativi payoffs;

- Statico/dinamico a seconda che il gioco si svolga in una sola volta o preveda più di una decisione;

- Cooperativo/Non cooperativo a seconda che preveda o meno la possibilità per i giocatori di accordarsi sulle strategie;

Noi ci concentreremo sui *giochi statici ad informazione completa e non cooperativi*.

Giochi in forma Normale

Un gioco statico può essere rappresentato in forma normale così:

Strategia

Payoff gioc. B

		B	
		1	2
A	1	$(7,7)$	$(6,3)$
	2	$(5,8)$	$(3,9)$

Giocatore

Payoff gioc. A

Significa che: se il giocatore A gioca la strategia 1 e il giocatore B gioca la strategia 2, allora il giocatore A vince 6 mentre il giocatore B vince 3

Come identificare le strategie che verranno realmente adottate?

Strategie Dominanti e Dominate

Un primo passo consiste nel vedere se esistono delle strategie che un giocatore non adotterebbe in nessun caso, cioè qualunque dovesse essere la scelta compiuta dagli altri giocatori. Se esiste si parla di strategia dominata. Nel qual caso quella alternativa può essere eliminata in quanto non verrà mai scelta. Se dal processo di eliminazione delle strategie dominate ne resta soltanto una, quella sarà una strategia dominante, e ovviamente la scelta del giocatore non potrà che ricadere su quella strategia.

Vediamo come procedere per identificare questi tipi di strategie. Usiamo il gioco in forma normale della slide precedente.

- ✓ Al giocatore A conviene scegliere la strategia 1 se il giocatore B adotta la strategia 1 ($7 > 5$), ma anche se adottasse la strategia 2 ($6 > 3$). Quindi per il giocatore A, la strategia 1 è dominante, mentre la strategia 2 è dominata;

- ✓ Il giocatore B non ha strategie dominanti o dominate (se A sceglie 1 a lui conviene adottare la strategia 1 mentre se A sceglie 2 a lui conviene adottare la strategia 2);

Strategie Dominanti e Dominate

- ✓ Il giocatore B però sa che per il giocatore A esiste una strategia dominante, che è la strategia 1 (ricordiamoci che è un gioco ad informazione completa) e quindi effettuerà la sua scelta sapendo che l'altro giocatore adotterà la strategia 1;

- ✓ Il giocatore B sceglie la strategia 1 e il risultato è che entrambi i giocatori ottengono una vincita pari a 7.

Non è sempre così facile però ottenere la scelta dei giocatori, consideriamo questo gioco:

		B: 1	B: 2
A	1	$(4,8)$	$(10,3)$
A	2	$(5,7)$	$(6,8)$

Metodo del MINIMAX

Nel gioco in questione non esistono strategie dominanti o dominate.

Come procedere allora?

Uno dei padri fondatori della teoria dei giochi, John Von Neumann, propose il cosiddetto metodo del MINIMAX.

Il metodo del MINIMAX consiste nell'adottare la strategia che comporta la più alta (MAX) tra le minime vincite possibili (MIN).

In pratica è un procedura che consente di evitare vincite troppo basse, o nel caso siano previste, di evitare le perdite più pesanti.

Come funziona il metodo nel gioco della slide precedente?

Metodo del MINIMAX

- Se consideriamo il giocatore A notiamo che la minima vincita ottenibile per lui è 4, e si può verificare adottando la strategia 1. La strategia 2 permette di avere come risultato più negativo possibile una vincita di 5, che è comunque più alta di 4, quindi il giocatore A adotterà la strategia 2;

- Nel caso in cui il giocatore B scelga la strategia 1 ha una vincita di 7 come ipotesi più pessimistica, mentre scegliendo la strategia 2 rischia di portarsi a casa solo 3, ragion per cui adotterà la strategia 1.

- In definitiva il giocatore 1 otterrà 5 mentre il giocatore 2 otterrà 7.

Eppure scegliere entrambi la strategia 2 sarebbe stato meglio per tutti i due, perché non si verifica questa ipotesi?

Lo vediamo meglio dopo aver introdotto il più noto concetto della teoria dei giochi…

Equilibrio di NASH

Il matematico americano John F. Nash diede un grande contributo al diffondersi della Teoria dei Giochi. Il suo principale contributo è contenuto nelle poche pagine della sua tesi di dottorato ed è il concetto di Equilibrio di Nash. Detto in parole povere:

Un equilibrio di Nash è un profilo di strategie per il quale nessun giocatore è disposto ad essere l'unico a cambiare strategia

In pratica in un eq. di Nash nessun giocatore è incentivato a cambiare strategia, dove l'incentivo è dato dall'eventualità di ottenere una vincita più alta.

Come identificare gli eq. di Nash? Esistono sempre? Può esserci più di un eq. di Nash?

Equilibrio di NASH

Consideriamo questo gioco:

		B	
		1	2
A	1	$(4,8)$	$(6,3)$
	2	$(5,7)$	$(10,8)$

Eq. di Nash

Per trovare gli equilibri di Nash occorre prendere in considerazione tutti i candidati:

- $p(1,1)$ non è un equilibrio di Nash in quanto il giocatore A avrebbe incentivo a cambiare la sua scelta passando alla strategia 2 (5>4);
- $p(1,2)$ non è un equilibrio di Nash in quanto entrambi i giocatori avrebbero incentivo a cambiare strategia (8>3 per B e 10>6 per A);
- $p(2,1)$ non è un equilibrio di Nash in quanto il giocatore B avrebbe incentivo a cambiare la sua scelta passando alla strategia 2 (8>7);
- $p(2,2)$ è un equilibrio di Nash in quanto nessun giocatore ha un incentivo a cambiare strategia.

<u>*Equilibrio di NASH*</u>

B

		1	2	3
	1	$(7,2)$	$(5,\underline{3})$	$(0,0)$
A	2	$(9,\underline{8})$	$(3,2)$	$(0,0)$
	3	$(0,0)$	$(1,0)$	$(2,1)$

Un metodo alternativo per identificare gli eventuali equilibri di Nash consiste nel prendere in considerazione, per ogni alternativa a disposizione di un giocatore, la <u>massima vincita</u> ottenibile dall’altro, e sottolinearla.

Ad esempio, se il giocatore A sceglie la strategia 1 allora il giocatore B ha una massima vincita pari a 3 (che sottolineo) ottenibile con la strategia 2;

Se A sceglie la strategia 2 allora il giocatore B può ottenere un massimo di 8;

Equilibrio di NASH

B

A	1	2	3
1	$(7,2)$	$(5,3)$	$(0,0)$
2	$(9,8)$	$(3,2)$	$(0,0)$
3	$(0,0)$	$(1,0)$	$(2,1)$

Proseguendo allo stesso modo, al termine della procedura gli equilibri di Nash saranno identificati dall'avere entrambi i payoffs sottolineati, nel nostro caso sono ben 3: $p(1,2)$; $p(2,1)$ e $p(3,3)$.

L'esempio mostra l'eventualità di avere *equilibri di Nash multipli*.

Il Dilemma del Prigioniero

Abbiamo due prigionieri accusati dello stesso reato.
Le prove non sono sufficienti, da sole, per condannarli: serve una confessione.

I due prigionieri vengono interrogati in celle separate.

Le possibilità sono queste:

- se entrambi non confessano verranno accusati di un reato minore e si faranno un anno di carcere;

- se confessano accusandosi l'un l'altro allora sconteranno entrambi una pena di due anni di carcere;

- se uno confessa e l'altro no, colui che parla avrà la libertà mentre all'altro spettano cinque anni di carcere.

La situazione è rappresentabile tramite questa forma normale:

Il Dilemma del Prigioniero

		B	
		C	NC
A	C	$(\underline{-2}, \underline{-2})$	$(\underline{0}, -5)$
	NC	$(-5, \underline{0})$	$(-1, -1)$

L’equilibrio di Nash consiste in una confessione da parte di entrambi.

Eppure se entrambi non confessassero starebbero entrambi meglio. Cosa impedisce loro di farlo?

La risposta risiede nel fatto che essendo gli interrogatori separati i due prigionieri non possono accordarsi, e quindi se scegliessero di non confessare rischierebbe di prendersi 5 anni di carcere nel caso in cui sia l’altro a confessare.

Coordinamento: la Battaglia dei Sessi

La situazione è questa: moglie e marito dispongono di una serata libera per andarsi a divertire. In contemporanea in città si svolgono due avvenimenti: la partita di calcio (che ovviamente piace al marito) e un musical in teatro (la passione della moglie).

- se entrambi vanno a vedere la partita il marito si diverte tantissimo (quantifichiamolo a 10) mentre la moglie molto meno (mettiamo 3);

- i payoff sono l'opposto se vanno entrambi a teatro;

- se vanno separati a vedere ognuno la forma preferita di intrattenimento, il loro divertimento è limitato dall'essere soli (diciamo 2 per entrambi);

- nell' inverosimile eventualità che ognuno vada ad assistere allo spettacolo preferito dall'altro la noia e la solitudine porterà a 0 il divertimento di entrambi.

La situazione è rappresentabilie tramite questa forma normale:

Coordinamento: la Battaglia dei Sessi

		Ma	
		C	T
Mo	C	$(\underline{3},\underline{10})$	$(0,0)$
	T	$(2,2)$	$(\underline{10},\underline{3})$

Ci sono due equilibri di Nash e sono quelli che prevedono un *coordinamento* tra i due giocatori: cioè entrambi fanno la stessa scelta.

Questo risultato è ottenuto perché il “compiere la stessa scelta” è di per sé all’origine di un aumento del divertimento.

GIOCHI EVOLUTIVI

Finora abbiamo trattato solo concetti statici di equilibrio, *come se i giocatori debbano giocare una sola volta*. In realtà le situazioni spesso si ripetono e quello che realmente interessa è se esistono strategie che tendono a prevalere col ripetersi del gioco.

John Maynard Smith ritiene che una situazione di giochi ripetuti sia quella che permette alla natura di selezionare i geni di coloro le cui strategie sono migliori della concorrenza.

Richard Dawkins si riferisce alle strategie che finiscono per evolversi come strategie evolutivamente stabili (EES) e i giochi da cui queste si originano prendono il nome di GIOCHI EVOLUTIVI.

Il Gioco Falchi-Colombe

Diciamo innanzitutto che i due nomi si riferiscono a due ipotetici comportamenti all'interno della stessa specie, e non ai due tipi di animali.

Tutti gli individui sono classificati come Falchi o Colombe a seconda del loro comportamento in combattimento, che si può verificare solo nel corso di uno dei combattimenti.

❖ I Falchi combattono con forza, violentemente, ritirandosi dal combattimento solo se seriamente feriti;

❖ Le Colombe lanciano minacce, ma non feriscono realmente nessuno;

❖ Se un Falco si scontra con una Colomba quest'ultima scappa via subito, senza restare ferita;

❖ Se due Falchi si scontrano il combattimento è particolarmente cruento e termina solo quando uno dei due e gravemente ferito;

Il Gioco Falchi-Colombe

❖ Se si scontrano due Colombe non si faranno del male, si limiteranno ad insultarsi senza ferirsi per molto molto tempo, finché uno dei due si stanca e si ritira.

Assegnando dei punti alle varie situazioni:

✓ 50 punti a chi vince;

✓ 0 punti a chi perde;

✓ -100 a chi resta gravemente ferito;

✓ -10 a chi perde tempo in un lungo combattimento.

Non ci interessa, staticamente, chi vincerebbe tra Falco e Colomba (sappiamo già che quest'ultima soccomberà) ma ci chiediamo se c'è una strategia evolutivamente stabile, ed è una cosa diversa. <u>Nel caso esista questa finirà per evolversi</u>.

Strategia Colomba

Analizziamo l'ipotesi che tutti gli appartenenti alla popolazione siano di tipo Colomba.

Da ogni combattimento ricavano 40 (=50-10) punti se vincono o -10 (=0-10) se perdono (ricordiamo infatti che gli insulti dureranno a lungo).

Sotto l'ipotesi che in media vincano il 50% degli scontri, i punti medi delle Colombe sono 40x0.5-10x0.5=15.

Supponiamo che in seguito ad una mutazione un individuo assuma la caratteristica di Falco. Questi sarà certo di vincere tutti gli scontri (perché si scontrerà sempre con Colombe), ricavando sempre 50 punti. Il suo successo relativo farà sì che
I GENI DEL FALCO SI DIFFONDERANNO NELLA POPOLAZIONE.

La strategia Colomba NON è evolutivamente stabile.

Col diffondersi del gene-falco però, questi ultimi non saranno più certi di incontrare solo Colombe…

Strategia Falco

Analizziamo ora l'ipotesi che tutti gli appartenenti alla popolazione siano di tipo Falco.

Da ogni combattimento i Falchi ricavano 50 punti se vincono o -100 se perdono, restando gravemente feriti.

Sotto l'ipotesi che in media vincano il 50% degli scontri, i punti medi dei Falchi sono 50x0.5-100x0.5=-25.

Supponiamo che in seguito ad una mutazione un individuo assuma la caratteristica di Colomba. Questa uscirà sempre sconfitta dagli scontri (perché si scontrerà sempre con Falchi), ricavando sempre 0 punti. Il suo è comunque un successo relativo che farà sì che
I GENI DELLA COLOMBA SI DIFFONDERANNO NELLA POPOLAZIONE.

Nemmeno la strategia Falco è evolutivamente stabile.

Falco-Colomba: quale stabilità?

Quanto detto finora potrebbe far pensare ad una continua oscillazione fra situazioni in cui la maggioranza della popolazione è del tipo Falco e situazioni in cui prevale la componente Colomba.

In realtà non è necessariamente così. Potrebbe esistere una proporzione tra Colombe e Falchi tale per cui nessuna delle due tipologie ha un vantaggio relativo.

Se questa proporzione di equilibrio esiste possiamo chiamare P_c la percentuale di Colombe e $P_f=1-P_c$ la percentuale di Falchi.

I punti medi della Colomba sono:

$$15P_c + 0(1-P_c)$$

Prob. di incontrare un Falco

Punti se incontra un'altra Colomba

Prob. di incontrare un'altra Colomba

Punti se incontra un Falco

Falco-Colomba: quale stabilità?

I punti medi del Falco sono:

$$50P_c - 25(1 - P_c)$$

Punti se incontra una Colomba

Prob. di incontrare una Colomba

Punti se incontra un altro Falco

Prob. di incontrare un altro Falco

Se essere Falco o Colomba è indifferente significa che i punti medi di Falco e Colomba sono gli stessi:

$$50P_c - 25(1 - P_c) = 15P_c$$

da cui le percentuali ottimali: $P_c = 5/12$ $P_f = 1 - P_c = 7/12$

Falco-Colomba: quale stabilità?

Una popolazione stabile è quindi caratterizzata da un rapporto 7:5 tra Falchi e Colombe.

Notiamo che in questa situazione il comune punteggio medio è poco più di 6, infatti:

$$50\frac{5}{12}-25\frac{7}{12}=15\frac{5}{12}=6.25$$

e non può essere considerata quindi una SELEZIONE DI GRUPPO, e cioè la scelta che gli appartenenti alla popolazione avrebbero fatto se si fossero accordati sul comportamento da adottare. Infatti, per esempio, essere tutti Colombe sarebbe stato più vantaggioso per tutti (15>6.25), ma in questi casi c'è sempre l'incentivo a venir meno all'accordo…

La strategia evolutivamente stabile è tale non tanto perché vantaggiosa per chi vi partecipa quanto perché immune a cambiamenti (è appunto STABILE).